Leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme . Réduction d'endomorphisme en dim finie. Applications.

— Développement 1 :
— Développement 2 :

E désigne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, de dimension $n \geqslant 1$, et u un endomorphisme de E

1 Polynôme d'endomorphismes

Éléments propres

Définition 1 (Valeur propre). *$\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u, s'il existe $x \in E$ non nul, tel que $u(x) = \lambda x$. On dit alors que x est **vecteur propre** attaché à la valeur propre λ.*
*On appelle **spectre** l'ensemble des valeurs propres u, et on note $Spec\{u\}$ cet ensemble.*

Remarque 2. *0 est valeur propre de u si et seulement si $\ker u \neq \{0\}$.*

Définition 3. *Soit λ une valeur propre de u. L'ensemble $\{E_\lambda = \{x \in E \,|\, u(x) = \lambda x\} = \ker u(x) - \lambda Id$ est sous-espace vectoriel de E stable par u, appelé **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ.*

Théorème 4. *Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des valeurs propres de u, distinctes deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_k}$ sont en sommes directe.*

L'algèbre $\mathbb{K}[u]$, polynôme minimal

Définition 5. *Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_i X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_i u^k \in \mathcal{L}(E)$ avec u^k la k-ième itéré de u.*

Proposition 6. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & & P & \longmapsto & P(u) \end{array}$$

est morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre, on note $\mathbb{K}[u]$ l'image de ce morphisme.

Définition 7. *On appelle **polynôme minimal** le générateur unitaire de $\ker \Psi$. On le note π_u.*
*Les polynômes de $\ker \Psi$ sont appelés polynômes **annulateurs**.*

Théorème 8. *Pour tout $P \in \ker \Psi$ on a $Spec(u) \subset P^{-1}\{0\}$, et dans le cas particulier du polynôme minimal on a $Spec(u) = \pi^{-1}\{0\}$.*

Théorème 9. *L'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$ est de dimension $p_u := deg(\pi_u)$. Une base est donnée par est donnée par $\left(u^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant p_u - 1}$.*

Théorème 10. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{K}[u]$ est un corps*
2. *π_u est irréductible*

Théorème 11 (Lemme des noyaux). *Soit $P = P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{K}[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Alors*

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$$

Polynôme caractéristique

Définition 12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P_A(X) = \det[A - XI_n]$.*
On note P_u le polynôme caractéristique de u, qui est le polynôme caractéristique de la matrice de u.

Proposition 13. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $P_A(0) = \det(A)$ et $P_{{}^tA} = P_A$. Et si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ on a $P_{PAP^{-1}} = P_A$.*

Définition 14. *Le polynôme caractéristique de u est définit par celui de sa matrice dans une base quelconque. On le note P_u.*

Exemple 15. *Soit f l'endomorphisme représenté dans la base canonique par la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a $P_u = \det(u - idX) = (X-2)(X-3)$

Proposition 16. *Les valeurs propre de u sont les racines de P_u.*

Proposition 17. *SI u est un endomorphisme nilpotent, alors $P_u = (-1)^n X^n$.*

Proposition 18. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in Spec(u)$, alors $P(\lambda) \in Spec(P(u))$.*

Théorème 19 (Cayley-Hamilton). *Le polynôme caractéristique de u est annulateur.*

Corollaire 20. *π_u divise P_u.*

Définition 21. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit l'exponentielle de A par la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ de rayon de convergence $+\infty$.*

Application 22. *Si $A = PDP^{-1}$, alors $e^A = Pe^D P^{-1}$*

Application 23. $\boxed{\text{DÉVELOPPEMENT}}$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$

Corollaire 24.
1. *$exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C})$*
2. *$exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\}$*

2 Application à la réduction

Diagonalisation

Définition 25. *On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de vecteur propre de u. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il est semblable à une matrice diagonale.*

Remarque 26. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est diagonalisable.*

Proposition 27. *Si P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples, alors u est diagonalisable.*

Théorème 28. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1. *u est diagonalisable*
2. *P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racines λ_i de P_u d'ordre de multiplicité h_i, $h_i = \dim E_{\lambda_i}$*
3. *π_u est scindé et à racines simples.*
4. *Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de u vérifiant $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$*

Corollaire 29. *Si u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable.*

Exemple 30. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable.*

$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable.*

Proposition 31. *Soit λ une racine de P_u d'ordre de multiplicité h. Alors $\dim E_\lambda \leqslant h$.*

Proposition 32. *Si u est diagonalisable et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable.*

Application 33 (Burnside). $\boxed{\text{DÉVELOPPEMENT}}$

Tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini.

Endomorphismes autoadjoints

Dans cette section E est un espace vectoriel euclidien munit du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et u est un endomorphisme de E.

Définition 34. *On dit que u est autoadjoint si pour tout $x, y \in E$ on a $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.*

Remarque 35. *u est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique*

Théorème 36. *Si u est autoajdoint alors*
1. *u est diagonalisable*
2. *les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux*

Endomorphismes normaux

E désigne un espace hermitien.

Définition 37. *On dit que u est un endomorphisme **normal** si u et $u*$ commutent.*

Proposition 38. *Si u est normal, alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.*

Théorème 39. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *u est normal ;*
2. *u se diagonalise dans une base orthonormale de E ;*
3. *u et u^* sont codiagonalisable dans une base orthonormale.*

Trigonalisation

Définition 40. *u est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Une matrice A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Théorème 41. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *u est trigonalisable*
2. *Il existe un polynôme annulateur de u qui est scindé ;*
3. *P_u est scindé sur $\mathbb{K}$;*
4. *π_u est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Corollaire 42. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors u est triagonalisable.*

Exemple 43. *Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables.*

Corollaire 44. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Application 45. *Si π_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u comptées avec leur multiplicité, on a :*

1. $\det(u) = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$
2. $Tr(u) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

Application 46. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$*

Application 47. *L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Remarque 48. *Ce résultat est faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Application 49. *On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables.*
$\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on a $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 50. *Si $n \leqslant 2$, l'application qui associe à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son polynôme minimal n'est pas continue.*

Application 51. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $P_{AB} = P_{BA}$.*

Dunford

Théorème 52 (Décomposition de Dunford). $\boxed{\text{DÉVELOPPEMENT}}$
Supposons P_u scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente, tels que

1. $u = d + n$
2. $d \circ n = n \circ d$

Application 53. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet la décomposition de Dunford $A = D + N$. Alors $e^A = e^D e^N$.*

Théorème 54. *Si $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u, alors celle de e^u est donnée par $e^u = e^d + e^d(e^n - Id)$ avec e^d diagonalisable et $e^d(e^n - Id)$ nilpotente.*

Corollaire 55. *u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable.*

Application 56. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} e^{tM} = 0$ si et seulement si pour toute valeur propre λ de M, on a $Re(\lambda) < 0$.*

Réduction simultanée

Proposition 57. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors :*

1. *Tout sous-espace propre de u est stable par v*
2. $\mathrm{Im}(u)$ *est stable par v*

Théorème 58. *Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables (resp. trigonalisables) et commutent, alors il existe une base commune de diagonalisation (resp. trigonalisation).*

Réduction par blocs

Définition 59. *Considérons le polynôme caractéristique de u $P_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$.*
*On appelle **espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_i le sous espace vectoriel $N_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$*

Théorème 60. *Supposons P_u scindé. Il existe alors une base $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p\}$ où $\mathcal{B}_i$ est une base de N_{λ_i} telle que $M(u)_{\mathcal{B}} = diag(T_1, \cdots, T_p)$ où*

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Exemple 61. *Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et sa réduction par blocs est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*

3 Applications

Exponentielle de matrice

Bibliographie

— Xavier Gourdon : Les maths en tête.
— J.E Rombaldi : Algèbre et géométrie
— Joseph Grifone : Algèbre linéaire